

## تابع احتمال

## متغیر تصادفی

مقدار یک متغیر تصادفی به وسیله نشانه  $X$  که از میان تصادفی تعیین می شود. مقترها تصادفی را با حرف بزرگ  $X, Y, \dots$  نمایش

می دهیم.

اگر  $X$  یک متغیر تصادفی باشد آنگاه تابع احتمال متغیر تصادفی

$X$  بصورت زیر است

$$f(x) = P(X=x)$$

مثال: از طرفی محوی ۵ خودکار نیز ۴ خودکار و نیز و یک خودکار آبی خودکاری را در تصادف انتخاب می کنی اگر

نیز باشد مقدار متغیر تصادفی  $X=1$  اگر و نیز باشد  $X=2$

و اگر آبی باشد  $X=3$  تابع احتمال  $X$  را بنویسید

X	1	2	3
$f(x)$	$\frac{5}{12}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{1}{12}$

۵  
۴  
۱  
۱۲

$$f(1) = P(X=1) = \frac{5}{12}$$

$$f(2) = P(X=2) = \frac{4}{12}$$

$$f(3) = P(X=3) = \frac{1}{12}$$

$$\sum_{x} f(x) = 1$$

۱  
۱۲

سوال: جعبه ای محتوی ۳ گوی قرمز و ۲ گوی زرد است. از این جعبه ۲ گوی را به تصادف انتخاب می‌کنیم. اگر متغیر تصادفی  $X$  نشان دهنده تعداد گوی قرمز باشد، تابع احتمال  $X$  را بیابید.

قرمز

X	0	1	2
$f(x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$

XX

۳  
۲  
۱  
۱۰

$$P(0) = P(X=0) = \frac{\binom{4}{0} \binom{5}{2}}{\binom{9}{2}} = \frac{1}{10}$$

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2! 3!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1 \times 3 \times 2 \times 1} = 10$$

$$P(1) = P(X=1) = \frac{\binom{4}{1} \binom{5}{1}}{\binom{9}{2}} = \frac{4 \times 2}{10} = \frac{4}{5}$$

$$P(2) = P(X=2) = \frac{\binom{4}{2} \binom{5}{0}}{\binom{9}{2}} = \frac{3}{10}$$

امد ریاضی و واریانس

امد ریاضی متوقعه  $X$  را با  $E(X)$  نمایش داده و برابر است

$$E(X) = \sum_{\omega} \omega P(\omega)$$

واریانس متوقعه  $X$  را با  $var(X)$  نمایش داده و برابر است با

$$var(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

نکته ۸

$$E(aX+b) = aE(X) + b$$

$$\text{var}(aX+b) = a^2 \text{var}(X)$$

سوال ۸ شخص سه سکه را سه بار می‌کند اگر هر سکه H باشد ۵ تومان و اگر دو سکه H باشد ۳ تومان و اگر فقط یک سکه H باشد ۱ تومان برنده می‌شود در صورتی که هیچ سکه H نباشد ۱۵ تومان می‌بازد امید ریاضی برد این شخص را بیاید.

$X$

کرد.

$X$	۵	۳	۱	-۱۵
$f(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$S = \{ HHH, HHT, THT, TTH, HHT, HHT, HTH, THT, TTT \}$

$$f(5) = P(X=5) = \frac{1}{8}$$

$$f(3) = P(X=3) = \frac{3}{8}$$

$$f(1) = P(X=1) = \frac{3}{8}$$

$$f(-15) = P(X=-15) = \frac{1}{8}$$

$$E(X) = 5\left(\frac{1}{8}\right) + 4\left(\frac{3}{8}\right) + 1\left(\frac{9}{8}\right) - 15\left(\frac{1}{8}\right)$$

$$= \frac{5 + 12 + 9 - 15}{8} = \frac{11}{8} = 1.375$$

یعنی این شخص هر بار که در بازی شرکت کند مبلغ ۱.۳۷۵ تومان برنده می شود.

**مثال:** از تعدادی خموش ۸ لامپ که ۲ تا از آنها سوخته است

۳ لامپ را به تصادف انتخاب می کنند اگر کمتر تصادفی

X نشان دهنده تعداد لامپ های سوخته باشد امید ریاضی X

را بیابید.

$$8 - 2 = 6$$

۶  
تایم  
سوخته

XXX

سوخته ها

X	0	1	2
$P(X)$	$\frac{20}{54}$	$\frac{30}{54}$	$\frac{4}{54}$

$$P(0) = P(X=0) = \frac{\binom{6}{3}}{\binom{8}{3}} = \frac{20}{54}$$

$$\binom{4}{3} = \frac{4!}{2!2!} = \frac{\cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1}{\cancel{2} \cdot \cancel{2}} = 3$$

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = \frac{\cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1}{\cancel{2} \cdot \cancel{2}} = 6$$

$$f(1) = P(X=1) = \frac{\binom{4}{1} \binom{4}{3}}{\binom{8}{4}} = \frac{4 \times 12}{28}$$

XXX  
X

$$\binom{4}{1} = \frac{4!}{1!3!} = \frac{\cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}} = 4$$

$$f(2) = P(X=2) = \frac{\binom{4}{2} \binom{4}{2}}{\binom{8}{4}}$$

XXX  
X

$$= \frac{1 \times 6}{28} = \frac{6}{28}$$

$$E(X) = 0 \left( \frac{6}{28} \right) + 1 \left( \frac{12}{28} \right) + 2 \left( \frac{6}{28} \right)$$

$$= \frac{0 + 12 + 12}{28} = \frac{24}{28} = \frac{6}{7}$$

X	-1	0	1	2
P(x)	0,1	0,2	0,3	0,4

8. 100

$$E(9X^2 + 2X) = (?) \quad \text{Var}(VX - 2) = (?)$$

$$E(X) = (-1)(0,1) + (0)(0,2) + (1)(0,3) + 2(0,4)$$

$$= -0,1 + 0 + 0,3 + 0,8 = 0,9$$

$$E(X^2) = (-1)^2(0,1) + (0)^2(0,2) + (1)^2(0,3) + 2^2(0,4) = 0,1 + 0 + 0,3 + 1,6 = 1,9$$

$$E(9X^2 + 2X) = 9E(X^2) + 2E(X)$$

$$= 9(1,9) + 2(0,9) = 19,8$$

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$= 1,9 - (0,9)^2 = 1,9 - 0,81 = 1,09$$

$$\begin{aligned} \text{var}(vX - 3) &= v^2 \text{var}(X) = 49 \text{var}(X) \\ &= 49(0.189) \\ &= 9.261 \end{aligned}$$

تابع احتمال توأم دو متغیر تصادفی

اگر  $X$  و  $Y$  دو متغیر تصادفی باشند احتمال وقوع هر زمان

این دو متغیر تصادفی را با  $f(x, y)$  نمایش داده و به صورت

زیر تعریف می شود:

$$f(x, y) = P(X = x, Y = y)$$