

جلسه هفتم ۲۰۲۰

تابع احتمال توأم دو متغیر تصادفی

اگر X و Y دو متغیر تصادفی باشند احتمال وقوع هر زمان

این دو متغیر تصادفی را با $f(x, y)$ نمایش داده و به صورت

زیر تعریف می شود:

$$f(x, y) = P(X = x, Y = y)$$

مثال: از ظرفی حاوی ۳ توپ قرمز، ۴ توپ سبز و ۵ توپ

آبی یک نمونه تصادفی انتخاب می کنند اگر X و Y به ترتیب

تعداد توپ های قرمز و سبز باشند تابع احتمال

توأم دو متغیر تصادفی X و Y را بنویسید.

۳ قرمز

۴ سبز

۵ آبی

۱۲

۳

سؤال

	0	1	2	3
0	$\frac{1}{2^3}$	$\frac{3}{2^3}$	$\frac{3}{2^3}$	$\frac{1}{2^3}$
1	$\frac{3}{2^3}$	$\frac{3}{2^3}$	$\frac{3}{2^3}$	0
2	$\frac{3}{2^3}$	$\frac{3}{2^3}$	0	0
3	$\frac{1}{2^3}$	0	0	0

$P(0,0) = \frac{\binom{3}{0} \binom{3}{0}}{\binom{6}{0}} = \frac{1}{2^6}$

$\frac{XXX}{\sqrt{}} \quad \frac{XXX}{\sqrt{}}$

$\binom{3}{2} = \frac{3!}{2!1!} = \frac{3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = 3$

$\binom{3}{3} = \frac{3!}{3!0!} = \frac{3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1} = 1$

$P(1,0) = \frac{\binom{3}{1} \binom{3}{0}}{\binom{6}{0}} = \frac{3 \times 1}{2^6} = \frac{3}{2^6}$

$\frac{XXX}{\sqrt{}}$

$\binom{3}{2} = \frac{3!}{2!1!} = 3$

$$f(2,0) = \frac{\binom{3}{2} \binom{5}{1}}{\binom{12}{4}} = \frac{3 \times 5}{220} = \frac{15}{220}$$

نہ آؤنہ

XXXX

$$f(2,0) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{12}{4}} = \frac{1}{220}$$

نہ آؤنہ

XXX

$$f(0,0) = \frac{\binom{4}{1} \binom{5}{2}}{\binom{12}{4}} = \frac{4 \times 10}{220} = \frac{40}{220}$$

نہ آؤنہ

XXXX

$$f(1,0) = \frac{\binom{3}{1} \binom{4}{1} \binom{5}{1}}{\binom{12}{4}} = \frac{3 \times 4 \times 5}{220} = \frac{60}{220}$$

نہ آؤنہ

XXXX

$$f(2,1) = \frac{\binom{3}{2} \binom{4}{1}}{\binom{12}{4}} = \frac{3 \times 4}{220} = \frac{12}{220}$$

نہ آؤنہ

XXXX

$$f(3,0) = 0$$

نہ آؤنہ

XXX

$$f(0,2) = \frac{\binom{4}{2} \binom{5}{1}}{\binom{12}{4}} = \frac{6 \times 5}{220} = \frac{30}{220}$$

نہ آؤنہ

XXXX

$$f(1,2) = \frac{\binom{3}{1} \binom{5}{2}}{\binom{12}{4}} = \frac{3 \times 10}{220} = \frac{30}{220}$$

نہ آؤنہ

XXXX

$$P(0, 3) = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{14}{4}} = \frac{4}{220} \quad \frac{XXX}{\text{نمونه}}$$

نمونه و کتاب

مسئله: تعدادی را سه بار کتاب می‌کنیم اگر در کتاب اول H باشد
 باید $X=0$ و اگر T باشد $X=1$. مقعر تصادفی Y
 نتیجه تعداد H ها می‌باشد تابع احتمال X و Y را بنویسید

$$S = \{ \overbrace{HHH}^3, \overbrace{HTT, THT, TTH}^1, \overbrace{HHT, HTH, THT}^2, \overbrace{TTT}^0 \}$$

		تعداد H ها			
		0	1	2	3
تعداد کتاب اول H	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$
	1	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$	0

$$P(0, 0) = 0$$

تعداد کتاب اول H
 ↓
 تعداد H ها

$$P(0, 1) = \frac{1}{8}$$

تعداد کتاب اول H
 ↓
 تعداد H ها

H

HTT

$$P(0,2) = \frac{2}{4}$$

↓
 کتیب اول H
 کتیب دوم H

HT
 HT

$$P(0,3) = \frac{1}{4}$$

↓
 کتیب اول H
 کتیب دوم H

HHH

$$P(1,0) = \frac{1}{4}$$

↓
 کتیب اول T
 کتیب دوم H

TTT

$$P(1,1) = \frac{2}{4}$$

↓
 کتیب اول T
 کتیب دوم H

THT
 TTH

$$P(1,2) = \frac{1}{4}$$

↓
 کتیب اول T
 کتیب دوم H

THT

$$\sum_x \sum_y P(x,y) = 1$$

8 rule

X \ Y	0	1	2	3
0	0	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{2}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda}$
1	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{2}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda}$	0

8/10

$f(x) = ?$ $f(y) = ?$

$E(X) = ?$ $E(Y) = ?$ $E(XY) = ?$

X	0	1
$f(x)$	$\frac{2}{\lambda}$	$\frac{2}{\lambda}$

Y	0	1	2	3
$f(y)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{2}{\lambda}$	$\frac{2}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda}$

$$E(X) = (0)\left(\frac{2}{\lambda}\right) + (1)\left(\frac{2}{\lambda}\right)$$

$$= 0 + \frac{2}{\lambda} = \frac{2}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}$$

$$E(Y) = (0)\left(\frac{1}{\lambda}\right) + (1)\left(\frac{2}{\lambda}\right)$$

$$+ 2\left(\frac{2}{\lambda}\right) + 3\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

$$= 0 + \frac{2}{\lambda} + \frac{4}{\lambda} + \frac{3}{\lambda}$$

$$= \frac{9}{\lambda} = \frac{3}{\lambda}$$

$$E(XY) = (0)(0)(0) + (0)(1)\left(\frac{1}{\lambda}\right) + (0)(2)\left(\frac{2}{\lambda}\right)$$

$$+ (0)(3)\left(\frac{1}{\lambda}\right) + (1)(0)\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

$$+ (1)(1)\left(\frac{2}{\lambda}\right) + (1)(2)\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

X \ Y	0	1	2	3
0	0	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{2}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda}$
1	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{2}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda}$	0

$$f(1)(x)(0) = 0 + \frac{x}{1} + \frac{x}{1} + 0 = \frac{x}{1} = \frac{1}{x}$$