

۲۷، ۲۸

جلسه نهم

کواریانس دو متغیر تصادفی

کواریانس دو متغیر تصادفی X و Y با نمار $Cov(X, Y)$ نشان داده می شود و برابر است با

$$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

$$Cov(X, Y) = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{3}{4} = \frac{2-3}{4} = -\frac{1}{4}$$

ضریب همبستگی

ضریب همبستگی دو متغیر تصادفی X و Y که با نمار r نشان

داده می شود به صورت زیر است

$$r = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var X} \sqrt{Var Y}}$$



→ $r > 0$ ← آواٹس سے باہر آواٹس دیریں
(کھٹے) (کھٹے)

$r = 0$ ← دو وقت پر پہنچنے کا صحیح باہم گزارند

→ $r < 0$ ← آواٹس (کھٹے) سے باہر آواٹس (دیریں)

مثال:

X \ Y	1	2	3
0	0,1	0,2	0,1
2	0,2	0,3	0,1

$$r = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

X	1	2	3
$P(X)$	0,3	0,5	0,2

Y	0	2
$P(Y)$	0,4	0,6

$$E(X) = (1)(0,3) + 2(0,5) + 3(0,2) = 2,4$$

$$E(Y) = (0)(0,4) + 2(0,6) = 1,2$$

$$E(X^2) = (1)^2(0,3) + 2^2(0,5) + 3^2(0,2) = 0,3 + 2,0 + 1,8 = 4,1$$

$$E(Y^2) = (0)^2(0,4) + 2^2(0,6) = 2,4$$

$$E(XY) = (0)(1)(0,11) + (0)(2)(0,12) + (0)(3)(0,1) + (1)(1)(0,12) + (1)(2)(0,13) + (1)(3)(0,1) = 0,12 + 0,12 + 0,12 = 0,36$$

X \ Y	1	2	3
0	0,11	0,12	0,1
1	0,12	0,13	0,1

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0,36 - (1,4)(0,25) = 0,36 - 0,35 = 0,01$$

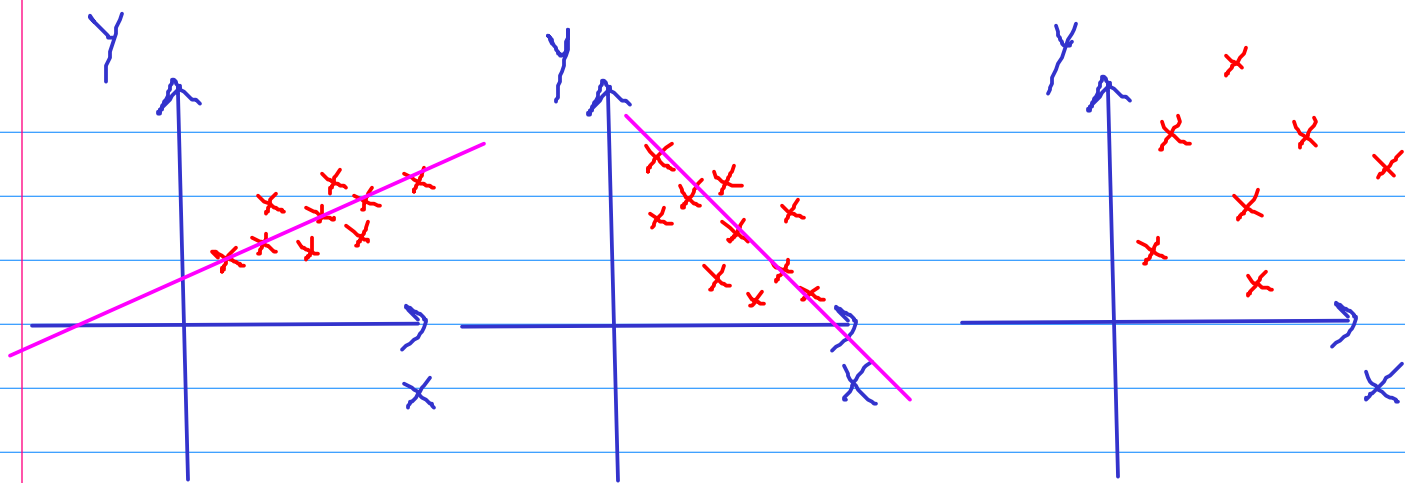
$$\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 1,48 - (1,4)^2 = 1,48 - 1,96 = 0,52$$

$$\text{Var}(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = 0,94 - (0,25)^2 = 0,94 - 0,0625 = 0,8775$$

$$r = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)} \sqrt{\text{Var}(Y)}}$$

$$= \frac{0,01}{\sqrt{0,52} \sqrt{0,8775}} = \frac{0,01}{(0,721) (0,936)} = \frac{0,01}{0,675} = 0,0148 < 0$$

ارتباط ضعیف منفی



$$r > 0$$

$$r < 0$$

$$r = 0$$

توزیع توابع

مثال: تالی را برای بسوی اگر متنوعه ان X عدد روی
تالی با f تابع احتمال X را بسید.

X	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

برای متنوعه ان متنوعه ان

توزیع متنوعه ان

اگر متنوعه ان X مقدار a_1, a_2, \dots, a_k را با احتمال

مردی اضربه توزیع احتمال X را توزیع گسسته نامند و در صورت زیر محاسبات را انجام دهید:

$$f(x) = \frac{1}{k} \quad x = x_1, x_2, \dots, x_k$$

در مثال قبل $f(x) = \frac{1}{4}$

$x = 1, 2, 3, 4$

مثال: از تعداد محتوی ۵ آجره که شماره های آن ۱ تا ۵ است که شماره آن ۱ تا ۵ است و هر آجره را به تصادف خارج می کنند اگر متوقف شوند X عدد روی مهره باشد توزیع احتمال X را بیابید.

$$f(x) = \frac{1}{25} \quad x = 1, 2, 3, 4, 5$$

مثال: از یک جعبه مداد رنگی که یک مداد به تصادف خارج

می کنند اگر متوقف شوند X شماره رنگ مداد باشد

توزیع احتمال X را بیابید.

$$f(x) = \frac{1}{4} \quad x = \text{رنگ مدادها}$$

توزیع برنولی

در یک آزمایش احتمال وقوع پدیده A $P(A) = p$ و

عدم وقوع آن $P(A') = q$ $(q = 1 - p)$

ضیق آزمای را آزمای برنولی و A و A' را در بر می آید

برنولی در تست جامع از صفر تا n را X را n بار تکرار

کنیم که برای هر تکرار $X = 1$ و برای ناکامی $X = 0$

آنکه $f(1) = p$ $f(0) = q$

$$f(x) = \begin{cases} p^x q^{1-x} & x = 0, 1 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

حال اگر آزمای برنولی را n بار به طور مستقل تکرار کنیم

این نوع آزمای را آزمای دو جمله‌ای و متفرق‌دهی X

راکنش نهغه تعداد وقوع سکه A (تعداد سکه) است
متغیر تصادفی دو جمله ای نامع.

$$f(x) = b(x, n, p) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

مسئله: احتمال اینکه یک لامپ سالم باشد ۰.۴ است. شخصی

۶ لامپ خریداره می کند اگر متغیر تصادفی X نشان دهنده

تعداد لامپ های سالم باشد تابع احتمال X را بسازید

$$p = 0.4$$

X X X X X X

$$q = 1 - 0.4 = 0.6$$

$$f(x) = b(x, 6, 0.4)$$

$$x = 0, 1, 2, \dots, 6$$

$$= \binom{6}{x} (0.4)^x (0.6)^{6-x}$$

مسئله: می دانیم ۶ درصد اوزار یک شهر طردار شخصی A هستند

موفقیت = P

۵ تو از اهالی شهر را انتخاب و تو از آنها می پرسیم.

مطلوب است احتمال اینکه دقیقاً ۳ نفر موافق شخصی A باشند.

$$n = 5$$

$$p = 0,4$$

$$q = 1 - 0,4 = 0,6$$

$$f(x) = b(n, 5, 0,4) = \binom{5}{x} (0,4)^x (0,6)^{5-x}$$

$$f(3) = \binom{5}{3} (0,4)^3 (0,6)^{5-3} = 0,3456$$

مثال: خانواده‌ای دارای ۴ فرزند است. اگر احتمال فرزند پسر

و دختر مساوی باشد معلوم می‌شود احتمال اینکه این

خانواده مراکز ۲ فرزند پسر داشته باشد.

$$f(2) + f(3) + f(4) + f(5) + f(6) = ?$$

$$1 - (f(0) + f(1))$$

$$f(x) = b(n, 4, \frac{1}{2})$$

$$n = 4$$

$$p = \frac{1}{2}$$

$$= \binom{4}{x} \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{4-x}$$

$$q = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$f(0) = \binom{4}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$$

$$f(1) = \binom{4}{1} \left(\frac{1}{4}\right)^1 \left(\frac{1}{4}\right)^3 = 4 \left(\frac{1}{4}\right)^4$$

$$= 4 \left(\frac{1}{16}\right)$$

$$f(0) + f(1) + f(2) + f(3) + f(4)$$

$$= 1 - (f(0) + f(1)) = 1 - \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{4}\right)$$

$$= 1 - \frac{5}{16} = \frac{11}{16}$$

$$= \frac{11}{16}$$