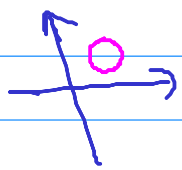
۲,۲۸,   جلسه دهم

مثال ۵ :

$$\sqrt[2]{1+i} = \sqrt[2]{\sqrt{2}}\; e^{i\left(\frac{2k\pi + \frac{\pi}{4}}{2}\right)}$$

$k=0,1$

$1+i$



$\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$ اول

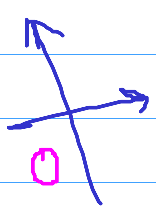
$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$

$tg\theta = \frac{y}{x} = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$

$$\sqrt[17]{-2-2i} = \sqrt[17]{\sqrt{8}}\; e^{i\left(\frac{2k\pi + \frac{5\pi}{4}}{17}\right)}$$

$k=0,1,\dots,16$

$-2-2i$



$\begin{cases} x=-2 \\ y=-2 \end{cases}$ سوم

$r=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}$

$tg\theta = \frac{y}{x} = \frac{-2}{-2} = 1$ $\frac{\pi}{4}$

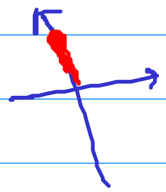
$\pi-\theta$	θ
$\pi+\theta$	$-\theta$

$\theta = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$

$$\sqrt[3]{4i} = \sqrt[3]{4}\; e^{i\left(\frac{2k\pi + \frac{\pi}{2}}{3}\right)}$$

$$k = 0, 1, 2$$

$4i$



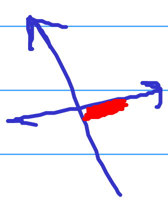
$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 4 \end{cases} \qquad r = \sqrt{0 + 4^2} = 4$$

$$tg\theta = \frac{4}{0} = \infty \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\sqrt[5]{4} = \sqrt[5]{4}\; e^{i\left(\frac{2k\pi + 0}{5}\right)}$$

$$k = 0, \dots, 4$$

4

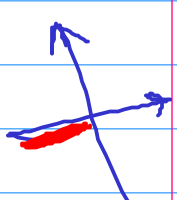


$$\begin{cases} x = 4 \\ y = 0 \end{cases} \qquad r = \sqrt{4^2 + 0} = 4$$

$$tg\theta = \frac{0}{4} = 0 \Rightarrow \theta = 0$$

$$\sqrt[8]{-9} = \sqrt[8]{9}\; e^{i\left(\frac{2k\pi + \pi}{8}\right)}$$

$$k = 0, \dots, 7$$



$$\begin{cases} x = -9 \\ y = 0 \end{cases} \qquad r = \sqrt{81 + 0} = 9$$

$$tg\theta = \frac{0}{-9} = 0 \Rightarrow \theta = \pi$$

تابع مختلط

$$f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$z \longmapsto w$$

$$w = f(z) = f(x+iy) = u+iv$$

مثال :

$$f(z) = z^2 + 1$$

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

$$f(x+iy) = (x+iy)^2 + 1$$

$$= x^2 + (iy)^2 + 2(x)(iy) + 1$$

$$= x^2 + \underbrace{i^2}_{-1} y^2 + 2xyi + 1$$

$$\boxed{i^2 = -1}$$

$$= \underbrace{x^2 - y^2 + 1}_{u} + \underbrace{2xy}_{v}\, i$$

$$f(z) = 5z - 9$$

$$f(x+iy) = 5(x+iy) - 9 = 5x + 5iy - 9$$

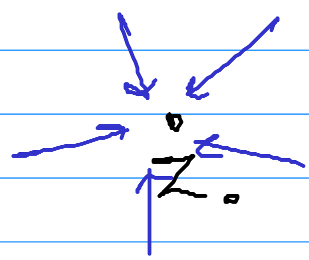
$$= \overbrace{5x - 9}^{u} + \overbrace{5y}^{v}\, i$$

مشتق توابع مختلط

تابع f در نقطه z_0 مشتق پذیر است هرگاه حد زیر وجود داشته باشد

$$f'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

مشتق پذیری در نقطه z_0 به این معناست



که حد برای تمام مسیرهایی که از z به z_0 ختم می شوند به مقدار واحدی (یکسانی) میل نماید.

نکته: تابع $f(z)=u+iv$ در نقطه z_0 مشتق پذیر (تحلیلی) است هرگاه در آن نقطه روابط زیر برقرار باشد

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \text{و} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

مثال: آیا در $f(z)=\bar{z}$ تحلیلی است.

$f(z)=\bar{z}$

$\square + i\square$

$f(x+iy)=x-iy$

$u=x$

$v=-y$

$\dfrac{\partial u}{\partial x}=1 \neq \dfrac{\partial v}{\partial y}=-1$

مشتق u نسبت به x

مشتق v نسبت به y

تحلیلی نیست

مثال: آیا $f(z)=5z-9$ تحلیلی است.

$f(z)=5z-9$

$$f(x+iy) = ۵(x+iy) - ۹ = ۵x + ۵iy - ۹$$

$$= \underbrace{۵x - ۹}_{u} + \underbrace{۵y}_{v}\, i$$

$$\begin{cases} u = ۵x - ۹ \\ v = ۵y \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = ۵ \quad = \quad \frac{\partial v}{\partial y} = ۵$$

تابع تحلیلی است

$$\frac{\partial u}{\partial y} = ۰ \quad = \quad \frac{\partial v}{\partial x} = ۰$$

مثال ۵: آیا تابع $f(z) = z^۲ + 1$ تحلیلی است.

$$f(z) = z^۲ + 1$$

$$f(x+iy) = (x+iy)^۲ + 1$$

$$= x^۲ + (iy)^۲ + ۲(x)(iy) + 1$$

$$= x^۲ + \overbrace{i^۲}^{-1} y^۲ + ۲xyi + 1$$

$$= \underbrace{x^۲ - y^۲ + 1}_{u} + \underbrace{۲xy}_{v}\, i$$

$$\begin{cases} u = x^2 - y^2 + 1 \\ v = 2xy \end{cases}$$

مشتق u نسبت x

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x$$

مشتق v نسبت y

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 2x$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

مشتق u نسبت y

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y$$

مشتق v نسبت x

$$-\frac{\partial v}{\partial x} = -2y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

تابع تحلیلی است.